第 2 节 函数零点小题策略：含参（★★★☆）

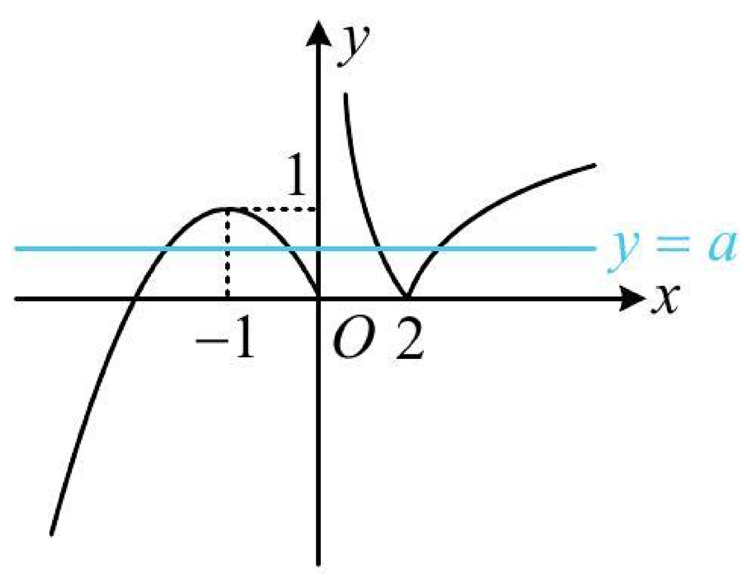
强化训练

1.（2023·云南昆明模拟·★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x, x\le 0\\ |\log_2 x-1|, x>0\end{cases}$，若方程 $f(x)=a$ 有 4 个不同的实数根，则实数 a 的取值范围是_____.

答案：$(0,1)$

解析：所给方程的参数已经全分离，故直接画图分析何时直线 $y=a$ 与 $y=f(x)$ 的图象有 4 个交点，

函数 $y=f(x)$ 的大致图象如图，由图可知要使两图象有 4 个交点，应有 $0<a<1$.



2.（2023·全国模拟·★★）若函数 $f(x)=(x-1)e^x-a$ 在 $(-2,+\infty)$ 上只有 1 个零点，则实数 a 的取值范围是_____.

答案：$[-3e^{-2},+\infty)\cup\{-1\}$

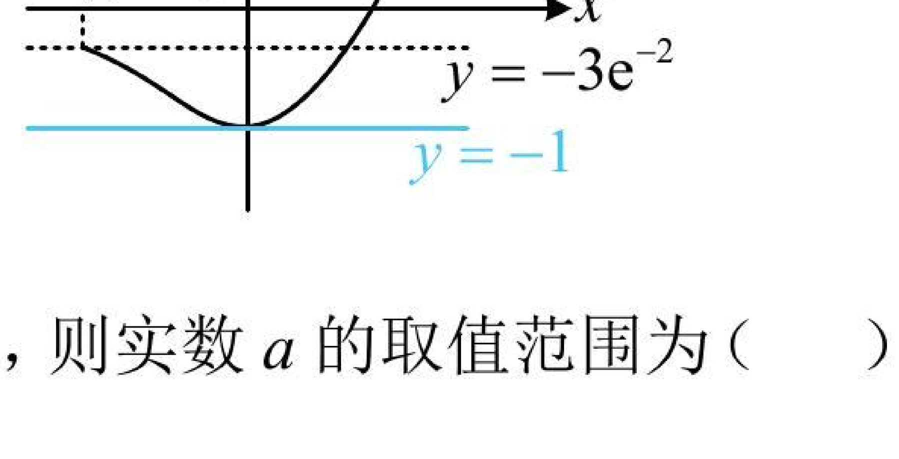
解析：观察发现参数 a 是孤立的，容易全分离，由题意，$f(x)=0\Leftrightarrow(x-1)e^x-a=0\Leftrightarrow(x-1)e^x=a$，

故只需看怎样能使 $y=a$ 与函数 $y=(x-1)e^x(x>-2)$ 的图象只有 1 个交点，要画图，应先求导分析单调性，

设 $g(x)=(x-1)e^x(x>-2)$，则 $g'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$，所以 $g'(x)>0\Leftrightarrow x>0$，$g'(x)<0\Leftrightarrow -2<x<0$，

故 $g(x)$ 在 $(-2,0)$ 上↘，在 $(0,+\infty)$ 上↗，又 $g(-2)=-3e^{-2}$，$g(0)=-1$，所以 $y=g(x)$ 的大致图象如图，

由图可知当且仅当 $a\in[-3e^{-2},+\infty)\cup\{-1\}$ 时，满足题意.



3.（2022·内蒙古赤峰模拟·★★★）已知函数 $f(x)=3x-ae^x$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围为（　　）

（A）$(-\infty,\frac{3}{e})$　（B）$(0,\frac{3}{e})$　（C）$(0,\frac{e}{3})$　（D）$(-\infty,\frac{e}{3})$

答案：B

解法 1：$f(x)=0\Leftrightarrow 3x-ae^x=0\Leftrightarrow 3x=ae^x$，两端同除以 e^x，即可全分离，

$3x = ae^x \Leftrightarrow a = \dfrac{3x}{e^x}$，所以问题等价于直线 $y = a$ 与函数 $y = \dfrac{3x}{e^x}$ 的图象有 2 个交点，

设 $g(x) = \dfrac{3x}{e^x}(x \in \mathbf{R})$，则 $g'(x) = \dfrac{3(1-x)}{e^x}$，所以 $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$，$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$，

从而 $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上↗，在 $(1,+\infty)$ 上↘，

又 $g(1) = \dfrac{3}{e}$，$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$，所以 $g(x)$ 的大致图象如图 1，

由图可知当且仅当 $0 < a < \dfrac{3}{e}$ 时，直线 $y = a$ 与 $g(x)$ 的图象有 2 个交点，故 $a \in (0,\dfrac{3}{e})$.

解法 2：$f(x)$ 的两部分都能作图，故用半分离也行，$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - ae^x = 0 \Leftrightarrow 3x = ae^x$，

为了作图方便，两端同除以 a，先考虑 $a = 0$ 的情形，

当 $a = 0$ 时，方程 $3x = ae^x$ 即为 $3x = 0$，所以 $x = 0$，故 $f(x)$ 只有 1 个零点，不合题意；

当 $a \neq 0$ 时，$3x = ae^x \Leftrightarrow \dfrac{3}{a}x = e^x$，注意到直线 $y = ex$ 与函数 $y = e^x$ 的图象相切，如图 2，

由图可知当且仅当 $\dfrac{3}{a} > e$ 时，$y = \dfrac{3}{a}x$ 与 $y = e^x$ 有两个交点，所以 $0 < a < \dfrac{3}{e}$.

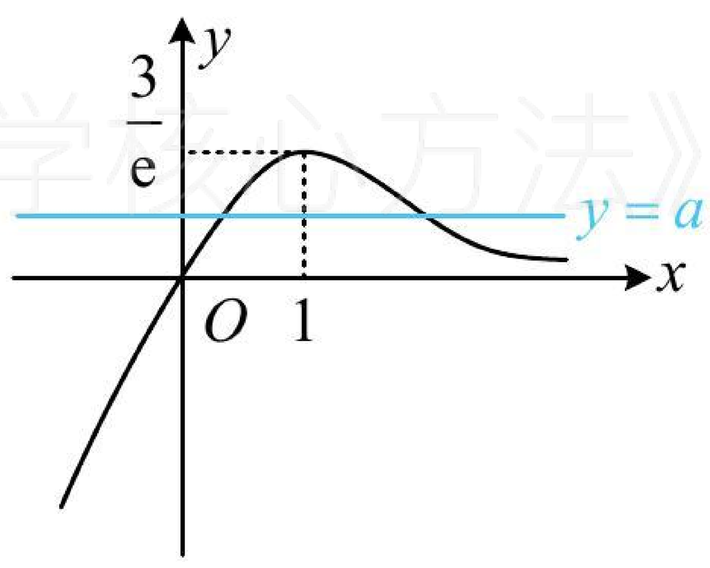


图1

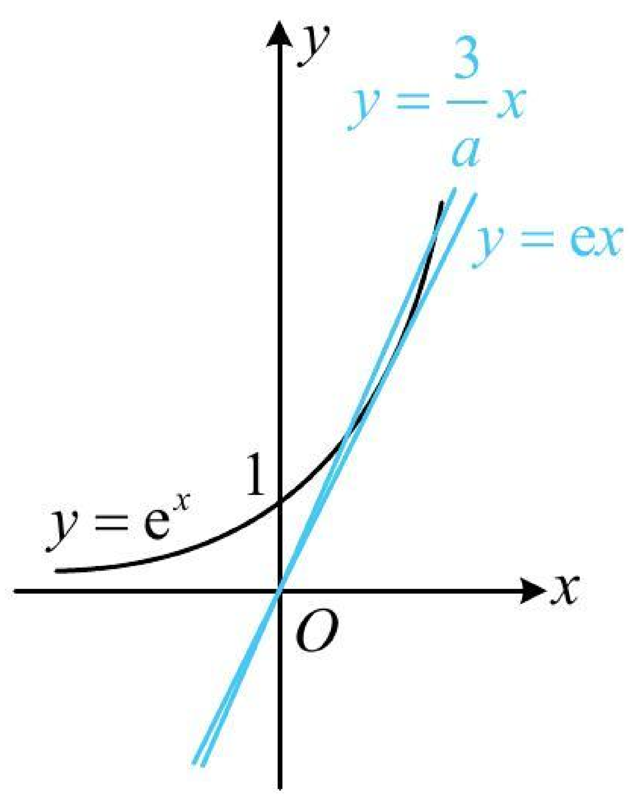


图2

4.（★★★）（多选）设函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, x > 0 \\ (x+1)e^x, x \le 0 \end{cases}$，若函数 $g(x) = f(x) - b$ 有 3 个零点，则实数 b 的取值可能是（　　）

（A）0　（B）$\dfrac{1}{2}$　（C）1　（D）2

答案：BC

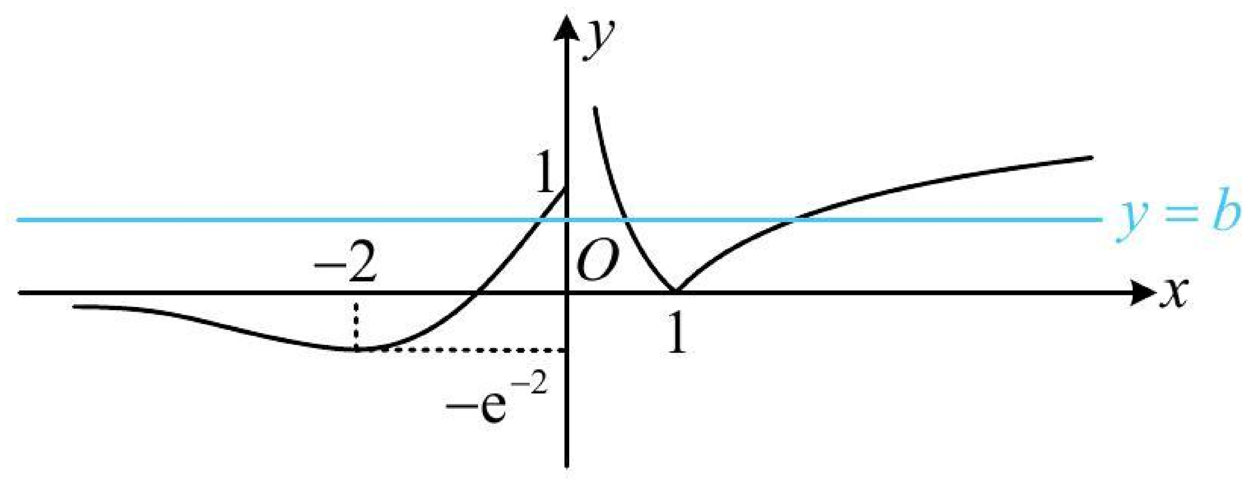
解析：先将参数 b 全分离出来，便于作图研究交点，$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = b$，

当 $x \le 0$ 时，$f(x) = (x+1)e^x$，$f'(x) = (x+2)e^x$，所以 $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2$，$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2 < x \le 0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上↘，在 $(-2,0]$ 上↗，$f(0) = 1$，$f(-2) = -\dfrac{1}{e^2}$，且当 $x \to -\infty$ 时，$f(x) \to 0$，

据此可作出 $f(x)$ 的草图如图，$g(x)$ 有 3 个零点等价于直线 $y = b$ 与 $f(x)$ 的图象有 3 个交点，

由图可知 $0 < b \le 1$，故选 B、C.



5．（2019 • 天津卷 • ★★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x},0\le x\le 1\\ \dfrac{1}{x},x>1\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f(x)=-\dfrac{1}{4}x+a$ 恰有两个互异的实数解，则 a 的取值范围为（　　）

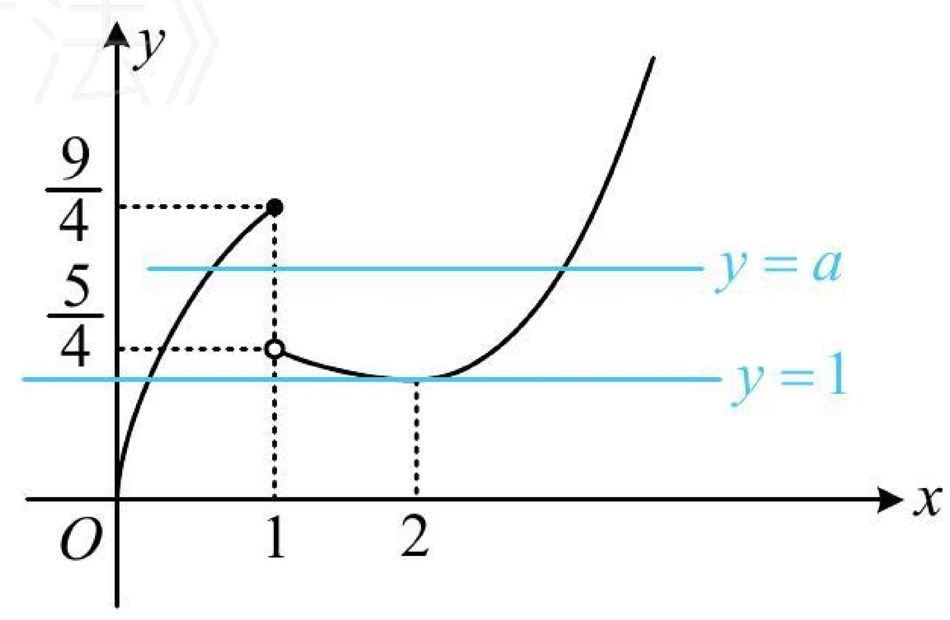
（A）$[\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}]$　　（B）$(\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}]$　　（C）$(\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}]\cup\{1\}$　　（D）$[\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}]\cup\{1\}$

答案： D

解析： 先全分离，转化为水平直线与函数图象交点问题，$f(x)=-\dfrac{1}{4}x+a\Leftrightarrow f(x)+\dfrac{1}{4}x=a$，

令 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{4}x$，则 $g(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}+\dfrac{x}{4},0\le x\le 1\\ \dfrac{1}{4}(x+\dfrac{4}{x}),x>1\end{cases}$，作出函数 $y=g(x)$ 的图象如图，

当且仅当 $a=1$ 或 $\dfrac{5}{4}\le a\le\dfrac{9}{4}$ 时，直线 $y=a$ 与 $y=g(x)$ 的图象有 2 个交点，满足题意.



【反思】 本题利用半分离方法，直接作图研究 $f(x)$ 的图象和直线 $y=-\dfrac{1}{4}x+a$ 的交点也行，但模型更复杂，不妨自行尝试.